

PROPULSIÓN DE AERONAVES

Profesores

Juan Manuel Tizón Pulido (ATA)

jm.tizon@upm.es

José Javier Álvarez García (NSA)

josejavier.alvarez@upm.es

Departamento de Motopropulsión y Termofluidodinámica

Tema 4: Empuje y definición de rendimientos

- Introducción
 - Repaso de termodinámica
 - Ecuaciones integrales de MF
- Definición de empuje
- Balance energético
- Definición de rendimientos

Tª de transporte de Reynolds

El teorema de transporte de Reynolds relaciona, la [derivada Lagrangiana](#) de una [integral](#) de volumen de un sistema, con una [integral en derivadas Eulerianas](#).

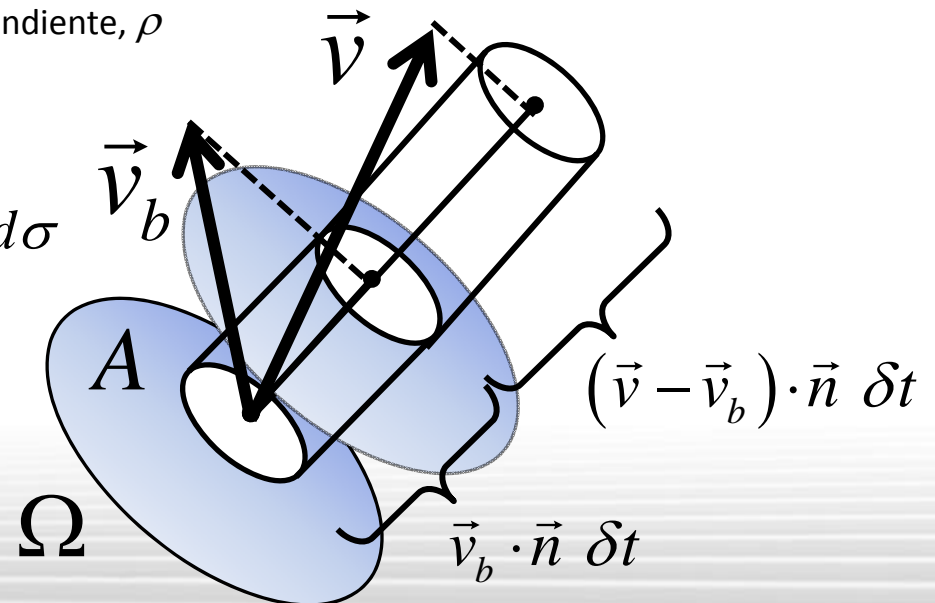
En otras palabras, este teorema relaciona la tasa de cambio en el tiempo de una propiedad extensiva H:

$$H = \int_{\Omega(t)} \rho \Phi d\Omega$$

$$Vol = (\vec{v} - \vec{v}_b) \cdot \vec{n} \delta t dA$$

con la generación y el flujo de la propiedad intensiva correspondiente, ρ h , mediante la fórmula:

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\vartheta_c} \rho \Phi d\Omega \right) + \int_{\Sigma_c} \rho \Phi (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma$$



Ecuaciones Integrales de la MF

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho d\Omega + \int_{\Sigma_c} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\sigma = G_{ext}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho \vec{v} d\Omega + \int_{\Sigma_c} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma_c} (-pI + \tau') \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\mathcal{V}_c} \rho \vec{f}_m d\Omega + \vec{F}_{ext}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho \vec{r} \times \vec{v} d\Omega + \int_{\Sigma_c} \rho \vec{r} \times \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma_c} \vec{r} \times (-pI + \tau') \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\mathcal{V}_c} \rho \vec{r} \times \vec{f}_m d\Omega + \vec{M}_{ext}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) d\Omega + \int_{\Sigma_c} \rho \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma_c} (\vec{n} \cdot \tau' \cdot \vec{v}) d\sigma - \int_{\Sigma_c} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\mathcal{V}_c} (\rho \vec{f}_m \cdot \vec{v}) d\Omega + W_{ext} + \dot{Q}_{ext}$$

Escenario habitual

- El movimiento en el interior de los motores es claramente no estacionario, pero tiene carácter cíclico y la media temporal de las variables fluidas valor estable ($d/dt=0$). Además, habitualmente, las sección en las que se evalúan los flujos se escogen con perfiles bastante uniformes y estables.
- Los efectos no estacionarios a tener en cuenta son los que producen acumulación de las magnitudes conservadas (masa, cantidad de movimiento y energía) en el interior del volumen por efecto de cambio de las condiciones de ambientes o de operación del motor, sin embargo estas variaciones son del orden del segundo mientras que el tiempo de residencia en el interior del motor es pequeño ($t_r=1 \text{ m}/200 \text{ m/s} = 0.005 \text{ s}$).
- Las fuerzas másicas se desprecian en virtud de la baja densidad del aire y la poquísima diferencia de alturas entre la entrada y la salida.
- También son despreciables el trabajo de las fuerzas de viscosidad (importante solo a números de Mach muy elevados) y los procesos de transmisión de calor (importantes a bajos números de Reynolds).
- Los términos con subíndice *ext* hacen referencia a acciones sobre superficies de control del volumen que no queremos, en principio, analizar con detalle. Por ejemplo, un rotor de compresor introduce en el sistema un par y una potencia mediante la interacción de las fuerzas de presión y fricción sobre una superficie móvil un volumen de control detallado que envuelve completamente al fluido.

Ecuaciones Integrales de la MF

$$\int_A \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

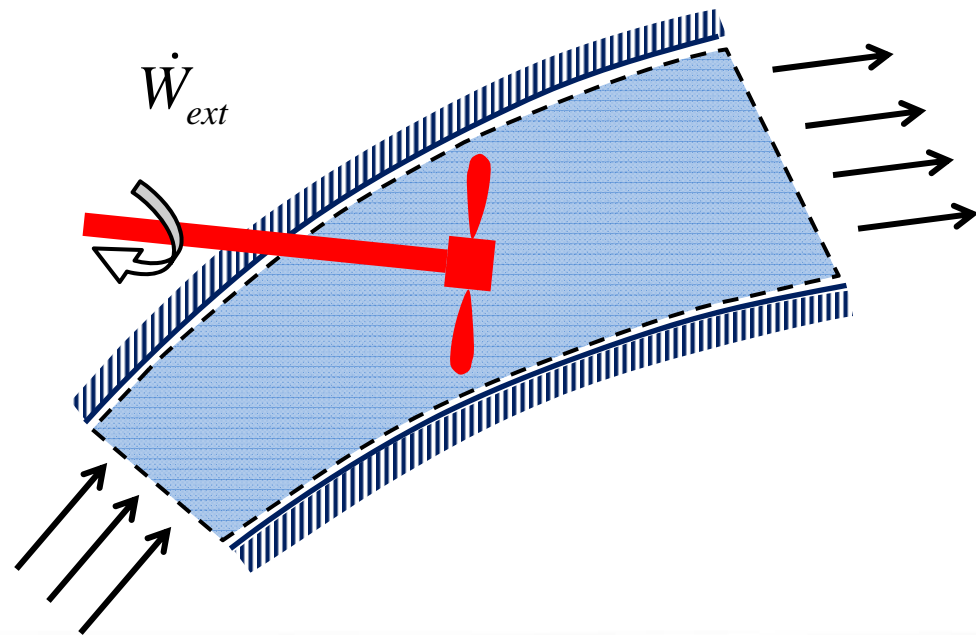
$$\int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_A (-pI + \tau') \cdot \vec{n} dA$$

$$\int_A \rho \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \dot{W}_{ext}$$

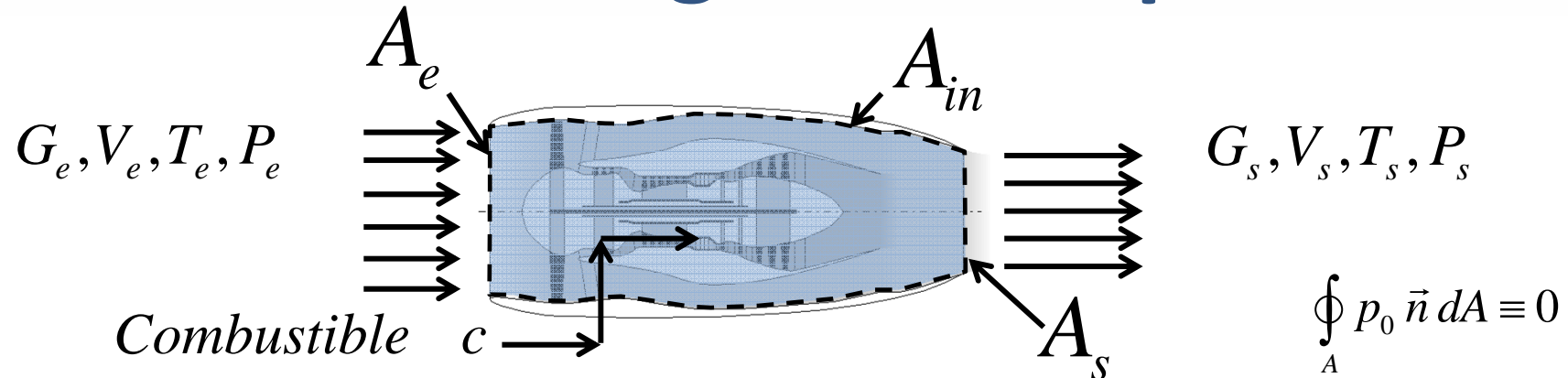
$$\int_A \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = G$$

$$\int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = GV$$

$$\int_A \rho \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = Gh_t$$



EMPUJE: Argumentos previos



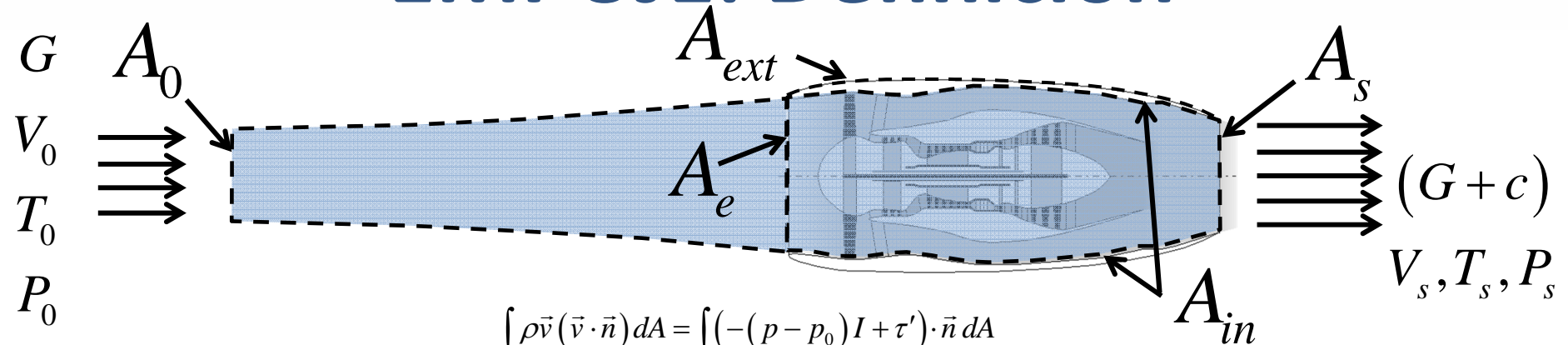
$$\int_A \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad \Rightarrow \quad -G_e + G_s - c = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} -G_e = \int_{A_e} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \\ \int_{A_e} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = -G_e \vec{V}_e \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_e = \frac{\int_{A_e} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA}{\int_{A_e} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA} \end{array} \right.$$

$$\int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_A (-(p - p_0)I + \tau') \cdot \vec{n} dA$$

$$-G_e \vec{V}_e + G_s \vec{V}_s = -(P_e - P_0) \vec{n}_e A_e - (P_s - P_0) \vec{n}_s A_s + \int_{A_{in}} (-(p - p_0)I + \tau') \cdot \vec{n} dA_{in}$$

$$\left. \begin{array}{l} (GV)_{\text{entradas o salidas}} \\ (\Delta PA)_{\text{sup. de corriente}} \end{array} \right\} \gg \int_{A \neq \text{PARED}} \tau' \cdot \vec{n} dA \approx 0$$

EMPUJE: Definición



$$\int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_A (-(p - p_0) \mathbf{I} + \tau') \cdot \vec{n} dA$$

$$-G\vec{V}_0 + (G + c)\vec{V}_s = - \int_{A_{0e}} (p - p_0) \vec{n} dA_{0e} - (P_s - P_0) \vec{n}_s A_s + \int_{A_{in}} (-(p - p_0) \mathbf{I} + \tau') \cdot \vec{n} dA_{in}$$

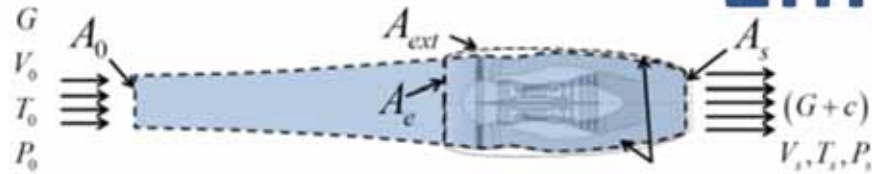
$$0 = \int_{A_{ext}} (-(p - p_0) \mathbf{I} + \tau') \cdot \vec{n} dA_{ext} - \int_{A_{ext}} (-(p - p_0) \mathbf{I} + \tau') \cdot \vec{n} dA_{ext}$$

Definición de “empuje instalado”

La resultante de las fuerzas de presión y fricción sobre las paredes internas y externas del motor, menos las fuerzas de fricción sobre la pared externa

$$-G\vec{V}_0 + (G + c)\vec{V}_s = \underbrace{- \int_{A_{0e}} (p - p_0) \vec{n} dA_{0e}}_{\vec{D}_{adicional}} - \underbrace{(P_s - P_0) \vec{n}_s A_s - \int_{A_{ext}} (p - p_0) \vec{n} dA_{ext}}_{\vec{D}_{ext}} - \vec{E}_{ins}$$

Empuje



$$\vec{E}_{ins} = -(G+c)\vec{V}_s + G\vec{V}_0 - (P_s - P_0)\vec{n}_s A_s + \vec{D}_{ext} + \vec{D}_{adc}$$

Con simetría axial todas las magnitudes anteriores solo tienen componente según el eje del motor y se pueden proyectar según la dirección esperada del empuje.

Entonces, abandonamos la notación vectorial en favor de la escalar, más habitual.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{D}_{adc} = - \int_{A_{0e}} (p - p_0) \vec{n} dA_{0e} \\ \bar{D}_{ext} = - \int_{A_{ext}} (p - p_0) \vec{n} dA_{ext} \end{array} \right.$$

EMPUJE INSTALADO NETO

$$E_{ins} = (G+c)V_s - GV_0 + (P_s - P_0)A_s - D_{ext} - D_{adc}$$

EMPUJE INSTALADO BRUTO

$$E_{ins} = (G+c)V_s + (P_s - P_0)A_s - D_{ext} - D_{adc}$$

EMPUJE NO-INSTALADO NETO o simplemente "Empuje"

$$E_{ins} = (G+c)V_s - GV_0 + (P_s - P_0)A_s$$

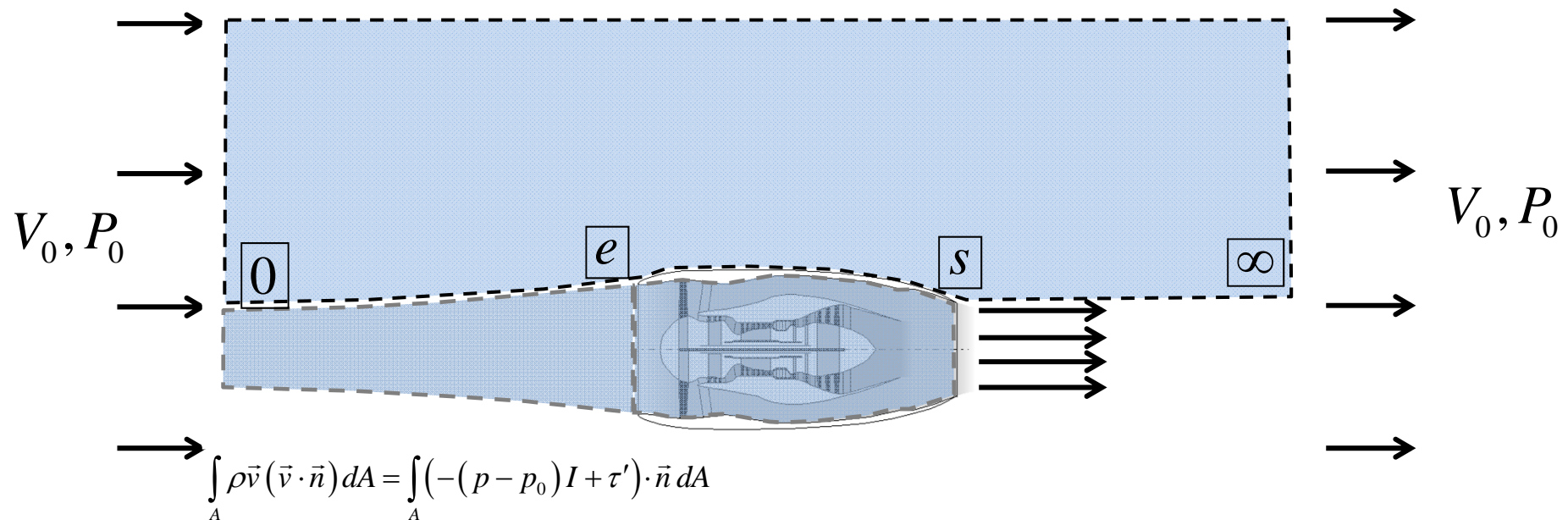
EMPUJE BRUTO

$$E = (G+c)V_s + (P_s - P_0)A_s$$

EMPUJE CON TOBERA ADAPTADA ($P_s = P_0$)

$$E = (G+c)V_s - GV_0$$

ADICIONAL Y EXTERNA



$$\int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_A (-(p - p_0) \mathbf{I} + \tau') \cdot \vec{n} dA$$

$$0 = - \int_{A_{0e}} (p - p_0) \vec{n} dA_{0e} - \int_{A_{ext}} (p - p_0) \vec{n} dA_{ext} - \int_{A_{s\infty}} (p - p_0) \vec{n} dA_{s\infty}$$

$$0 = \vec{D}_{adc}^{A_{0e}} + \vec{D}_{ext} - \int_{A_{s\infty}} (p - p_0) \vec{n} dA_{s\infty}$$

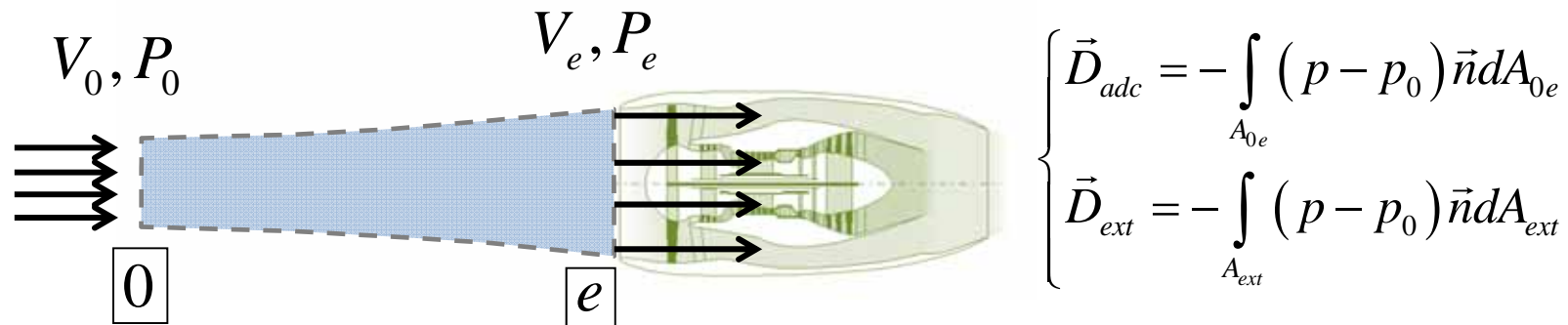
Hipotesis

- Se desprecian las fuerzas de fricción sobre la superficie externa.
- Tobera adaptada ($P_s = P_0$).
- Superficie de corriente del chorro cilíndrica de caras paralelas.

$$\vec{D}_{adc} \approx -\vec{D}_{ext}$$

$$\vec{E}_{standart} \approx \vec{E}_{ins}$$

Resistencia adicional



$$-G_0 \vec{V}_0 + G_e \vec{V}_e = -(P_0 - P_0) \vec{n}_0 A_0 - (P_e - P_0) \vec{n}_e A_e + \int_{A_{0-e}} (-(p - p_0) I + \tau') \cdot \vec{n} dA_{0-e}$$

$$\vec{D}_{adc} = G_e \vec{V}_e - G_0 \vec{V}_0 + (P_e - P_0) \vec{n}_e A_e$$

$$D_{adc} = G_e V_e - G_0 V_0 + (P_e - P_0) A_e$$

$$\frac{D_{adc}}{A_e P_0} = \left(\frac{T_e}{T_0} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left\{ \gamma M_e^2 \left(1 - \frac{M_0}{M_e} \sqrt{\frac{T_e}{T_0}} \right) + 1 \right\} - 1 \quad \frac{T_e}{T_0} = \frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_0^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_e^2}$$

CONSUMO ESPECIFICO E IMPULSO

Empuje estándar

$$E = (G + c)V_s - GV_0 + (P_s - P_0)A_s$$

Impulso específico

$$I = \frac{E}{G} = (1 + f)V_s - V_0 + (P_s - P_0)\frac{A_s}{G}$$

Consumo específico

$$C_E = \frac{c}{E} = \frac{f}{I}$$

EXPRESIONES

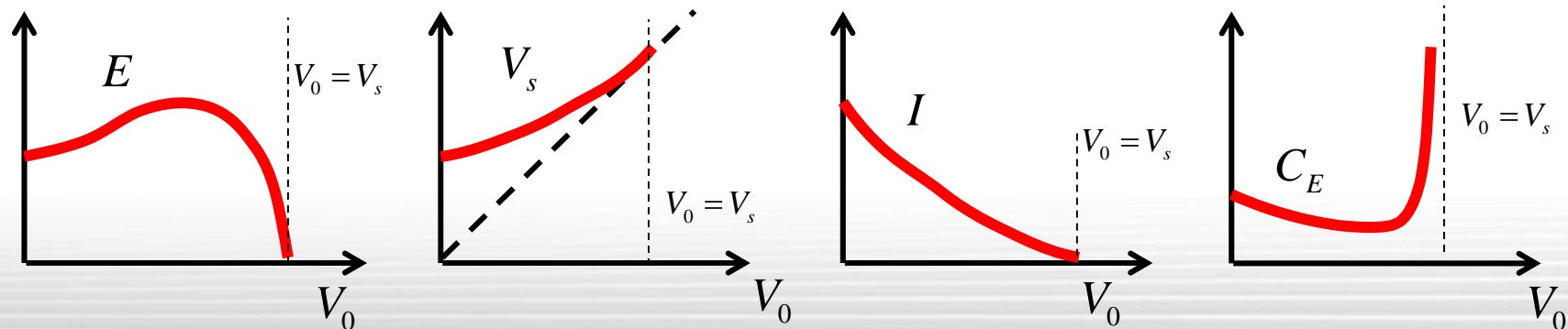
$$E \approx G(V_s - V_0) + (P_s - P_0)A_s$$

$$E = G(V_s - V_0)$$

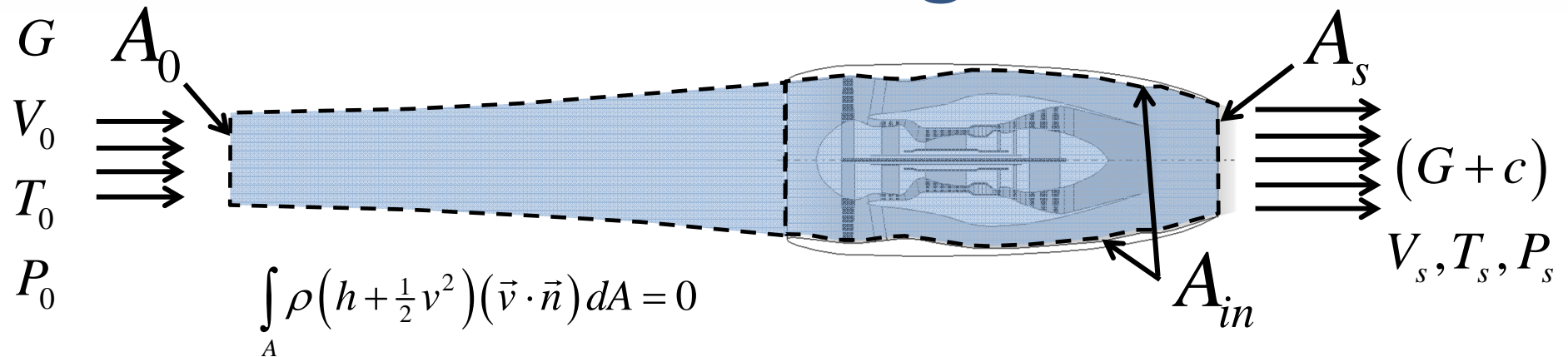
$$I \approx V_s - V_0 + (P_s - P_0)A_s/G$$

$$I = V_s - V_0$$

$$C_E = f/(V_s - V_0)$$



Balance Energético



$$G \left(h_a(T_0) + \frac{1}{2} V_0^2 \right) + c h_c(T_s) - (G+c) \left(h_p(T_s) + \frac{1}{2} V_s^2 \right) = 0$$

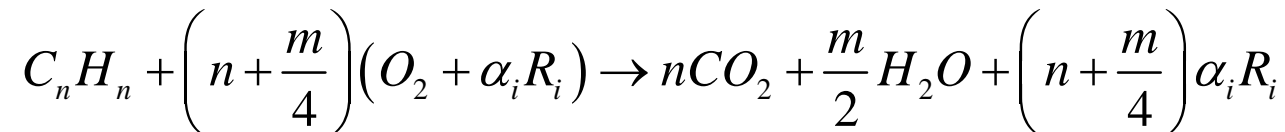
$$c h_c(T_s) = (G+c) h_p(T_s) - G h_a(T_0) + \frac{1}{2} (G+c) V_s^2 - \frac{1}{2} G V_0^2$$

Incremento de temperatura

Potencia mecánica neta
producida por el motor

Proceso de combustión

Combustión completa



Proporción aire/combustible estequiométrica

$$r_{st} = \frac{(n + m/4) M_a}{nM_c + mM_H} = \frac{(1 + \Lambda/4) M_a}{M_c + \Lambda M_H} \quad \begin{cases} M_a = M_{O_2} + \sum \alpha_i R_i \approx 32 + \frac{79}{21} 28 \\ \Lambda \approx 32/15 \\ r_{st} \sim (1 + 2.2/4) 137 / (12 + 2.2 * 1) = 15 \end{cases}$$

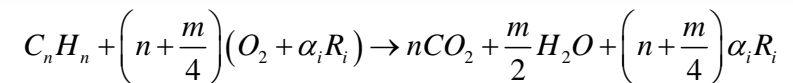
Habitualmente empleamos el inverso (FAR): $f_{st} = 1/r_{st} \sim 0.066$

En las cámaras de combustión es habitual funcionar con baja FAR, para tener temperaturas de entrada en turbina suficientemente bajas

$$f = c/G \sim 0.02$$

Esto implica no pocos problemas tecnológicos pero, por otra parte la composición a la salida del motor es parecida al aire lo que simplifica la formulación

Proceso de combustión



Poder calorífico

$$L = \frac{H_c^* + (1 + \Lambda/4) H_{O_2}^* - H_{CO_2}^* - \Lambda/2 H_{H_2O}^*}{M_c + \Lambda M_H}$$

$$\begin{cases} H_{O_2}^* = 0 \\ H_{CO_2}^* = -94.054 \text{ kcal/mol} \\ H_{H_2O}^* = -54.798 \text{ kcal/mol} \end{cases}$$

Rendimiento de combustión

$$\eta_q = 1 - \frac{(G + c) \Delta h_{\text{diferencia con PCC}}}{cL}$$

Calor realmente liberado

$$\eta_q cL = cL - (G + c) \Delta h_{\text{diferencia con PCC}}$$

Sustancia	Densidad (kg/m ³)	PCI (MJ/kg)
Antracita	875	34,3
Queroseno	780	43,3
Gas ciudad	0,65	26,3
Butano	580	45.8

Balance energético

$$ch_c(T_s) = (G + c)h_p(T_s) - Gh_a(T_0) + \frac{1}{2}(G + c)V_s^2 - \frac{1}{2}GV_0^2$$

$$c\eta_q L \approx (G + c)h_a(T_s) - Gh_a(T_0) + \frac{1}{2}(G + c)V_s^2 - \frac{1}{2}GV_0^2$$

$$c\eta_q L \approx (G + c)c_p(T_s - T_0) + \frac{1}{2}(G + c)V_s^2 - \frac{1}{2}GV_0^2$$

Potencia mecánica neta obtenida $W_m = \frac{1}{2}(G + c)V_s^2 - \frac{1}{2}GV_0^2$

Potencia suministrada por el combustible $\dot{Q} = cL$

Potencia útil para la propulsión $W_u = EV_0 = [(G + c)V_s - GV_0]V_0$

$$W_m = \frac{1}{2}(G + c)V_s^2 - \frac{1}{2}GV_0^2 = EV_0 + \frac{1}{2}(G + c)(V_s - V_0)^2 = W_u + W_{loss}$$

Balance energético

RENDIMIENTOS

Rendimiento motor

$$\eta_M = \frac{W_m}{\dot{Q}} = \frac{\frac{1}{2}(G+c)V_s^2 - \frac{1}{2}GV_0^2}{cL}$$

Rendimiento propulsor

$$\eta_P = \frac{W_u}{W_m} = \frac{EV_0}{W_m} = \frac{[(G+c)V_s - GV_0]V_0}{\frac{1}{2}(G+c)V_s^2 - \frac{1}{2}GV_0^2}$$

Rendimiento moto-propulsor

$$\eta_{MP} = \eta_M \eta_P = \frac{W_u}{\dot{Q}} = \frac{EV_0}{cL} \rightarrow C_E = \frac{V_0/L}{\eta_{MP}}$$

VARIABLES PROPULSIVAS

Impulso $I = \frac{E}{G} = (1+f)V_s - V_0$

Consumo específico $C_E = \frac{c}{E} = \frac{f}{I}$

Balance energético

Rendimiento motor $\eta_M = \frac{\frac{1}{2}(G+c)V_s^2 - \frac{1}{2}GV_0^2}{cL} \approx \frac{1}{2} \frac{V_s^2 - V_0^2}{fL}$

Rendimiento propulsor $\eta_P = \frac{[(G+c)V_s - GV_0]V_0}{\frac{1}{2}(G+c)V_s^2 - \frac{1}{2}GV_0^2} \approx 2 \frac{(V_s - V_0)V_0}{V_s^2 - V_0^2} = \frac{2V_0}{V_s + V_0}$

Rendimiento moto-propulsor $\eta_{MP} = \frac{V_0/L}{C_E}$

$$\eta_M = \frac{1}{2} \frac{V_s^2 - V_0^2}{fL}$$

$$\eta_P = \frac{2V_0}{V_s + V_0}$$

